2011中国西部数学奥林匹克

江西 玉山

第一天 10月29日 上午 8：00~12：00

每题15分

1．已知$0<x,y<1$，求$\dfrac{xy(1-x-y)}{(x+y)(1-x)(1-y)}$的最大值.

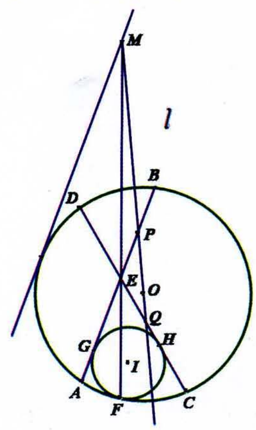
2．设集合$M\subseteq\{1,2,\mathrm{L}\ ,2011\}$，满足：在$M$的任意三个元素中，都可以找到两个元素$a,b$，使得$a|b$或$b|a$．求$|M|$的最大值（其中$|M|$表示集合$M$的元素个数）．

3．给定整数$n\geq 2$，

(1) 求证：可以将集合$\{1,2,\mathrm{L}\ ,n\}$的所有子集适当地排列为$A_1,A_2,\mathrm{L}\ ,A_{2^n}$，使得$A_i$与$A_{i+1}$的元素个数恰相差1，其中$i=1,2,3,\mathrm{L}\ ,2^n$且$A_{2^n+1}=A_1$；

(2) 对于满足(1)中条件的子集$A_1,A_2,\mathrm{L}\ ,A_{2^n}$，求$\sum_{i=1}^{2^n}(-1)^i S(A_i)$的所有可能值，其中$S(A_i)=\sum_{x\in A_i}x$，$S(\varnothing)=0$．

4．如图，线段AB、CD是$\odot O$中长度不相等的两条弦，AB与CD的交点为E，$\odot I$内切$\odot O$于点F，且分别与弦AB、CD相切于点G、H．过点O的直线l分别交AB、CD于点P、Q，使得$EP=EQ$．直线EF与直线l交于点M，求证：过点M且与AB平行的直线是$\odot O$的切线．



2011中国西部数学奥林匹克

江西　玉山

第二天　10月30日 上午 8：00~12：00

每题15分

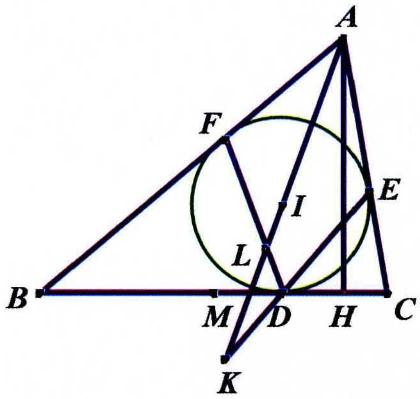
5．是否存在奇数$n \geq 3$及n个互不相同的质数$p_1, p_2, \mathrm{L}, p_n$，使得$p_i + p_{i+1}$（$i=1$，2，…，$n$，其中$p_{n+1} = p_1$）都是完全平方数？请证明你的结论．

6．设$a,b,c>0$，求证：

$$\frac{(a-b)^2}{(c+a)(c+b)}+\frac{(b-c)^2}{(a+b)(a+c)}+\frac{(c-a)^2}{(b+c)(b+a)} \geq \frac{(a-b)^2}{a^2+b^2+c^2}.$$

7．如图，在$\triangle ABC$中，$AB>AC$，内切圆$\odot I$与边BC、CA、AB分别相切于点D、E、F，M是边BC的中点，$AH \perp BC$于点H．$\angle BAC$的平分线AI分别与直线DE、DF交于点K、L．

求证：M、L、H、K四点共圆．



8．求所有的整数对（a，b），使得对任意正整数，都有$n \mid (a^n + b^{n+1})$．