第三十四届中国数学奥林匹克（2018年）

第一天

1. 对全体满足 $a, b, c, d, e \geq -1$ 且 $a + b + c + d + e = 5$ 的实数, 求

$$S = (a + b)(b + c)(c + d)(d + e)(e + a)$$

最大值及最小值.

2. 若正整数 a, b, c 是一个直角三角形的三边长, 则称三元集合 $\{a, b, c\}$ 为勾股三元組. 求证: 對任意勾股三元組 P, Q, 存在正整数 $m \geq 2$ 勾股三元組 $P_1, P_2, \dots, P_m$ 使得 $P=P_1, Q=P_m$, 且 $\forall\ 1 \leq i \leq m-1, P_1 \cap P_{i+1} \neq \varnothing$.

3. ΔABC 中, $AB < AC$, O 為外心, D 是 $\angle BAC$ 平分线上一点, E 在 BC 上, 滿足 $OE \parallel AD$, $DE \perp BC$, 在射线 EB 上取点 K 滿足 $EK=EA$, ΔAKD 外接圓与 BC 交于一点 $P \neq D$, ΔADK 外接圓与 ΔABC 外接圓交于另一点 $Q \neq A$. 求证 PQ 与 ΔABC 外接圓相切.

第二天

4. 給定一个长軸与短軸不等長的橢圓.
   (1) 证明: 其面积最小的外切的菱形是唯一的;
   (2) 写出用尺规作图作出这个菱形的过程.

5. 給定一个 $n \times n$ 的方格表, 每个格子中填入一个整数, 每次操作选择一个方格, 捋其同行, 同列 的 $2n-1$ 个数都加 1. 求最小的 $N(n)$ 使得无论開始時方格表內数填的是多少, 均可以通过有限次操作使得方格表至少有 $N(n)$ 个偶数.

6. 设点 $P_1, P_2, \ldots, P_{2018}$ 放在给定正五边形的內部或边界上. 求所有的放置方式使得

$$S = \sum_{1 \le i \le j \le 2018} |P_i P_j|^2$$

取到最大值.