2023 中国西部数学邀请赛

重庆

第一天　8 月 6 日 上午 8:00~12:00

每题 15 分

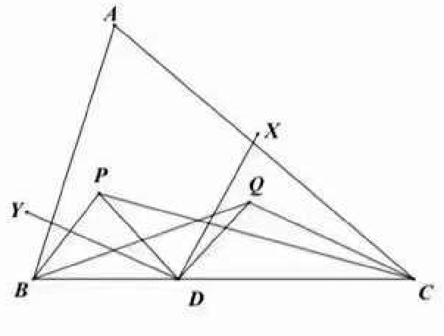
1．是否存在 6 个两两不同的整数 a,b,c,d,e,f，使得它们恰为关于 x 的方程

$$(x+a)\left(x^2+bx+c\right)\left(x^3+dx^2+ex+f\right)=0$$

的 6 个根？

2．某个国家有 2023 个岛和 2022 座桥，任意一座桥连接两个不同的岛，任意两个岛之间至多有一座桥相连，且可以从任意一个岛通过若干座桥到达其他任何岛．若三个岛中的某个岛与另两个岛都有桥连接，则称这三个岛组成"岛群"．已知任两个"岛群"中都有相同的岛，那么恰有一座桥的岛最少有多少个？

3．如图，已知$\triangle ABC$内两点 P、Q 满足 $\angle PBC=\angle QBA$ 且 $\angle PCB=\angle QCA$，线段 BC 上一点 D 满足 $\angle PDB=\angle QDC$．设点 A 关于直线 BP、CQ 的对称点分别为 X、Y．证明：$DX=DY$．



4．设 p 为素数，整数 a,b,c 均与 p 互素．证明：存在绝对值均小于 $\sqrt{p}$ 的整数 x_1,x_2,x_3,x_4 满足

$$ax_1x_2+bx_3x_4\equiv c\pmod p.$$

2023 中国西部数学邀请赛

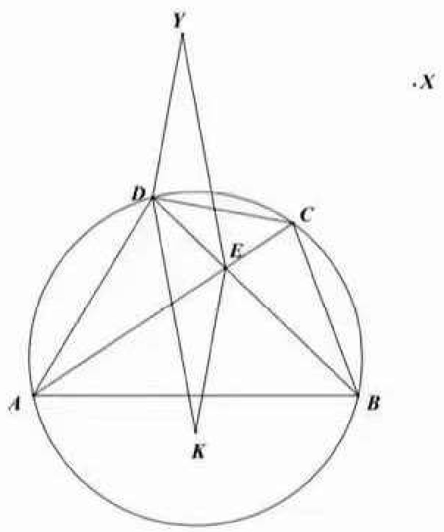
重庆

第二天　8 月 7 日 上午 8:00~12:00

每题 15 分

5．设非负实数 $a_1, a_2, \cdots, a_{100}$ 满足对任意 $2 \le i \le 99$，有 $\max\left\{a_{i-1}+a_i, a_i+a_{i+1}\right\} \ge i$．求 $a_1+a_2+\cdots+a_{100}$ 的最小值．

6．如图，设圆内接四边形 $ABCD$ 的对角线 AC 与 BD 的交点为 E，$\triangle ABE$ 的外心为 K，点 B 关于直线 CD 的对称点为 X，点 Y 满足四边形 $DKEY$ 是平行四边形．证明：点 D、E、X、Y 共圆．



7．对于正整数 x, y，用 $r_x(y)$ 表示满足 $r \equiv y \pmod{x}$ 的最小正整数 r．对任意正整数 a, b, n，证明：$\sum_{i=1}^{n} r_b(ai) \le \frac{n(a+b)}{2}$．

8．一个 100×100 方格表的左上角小方格中有一只老鼠，右下角小方格中有一块奶酪．老鼠希望移动到右下角小方格中吃奶酪，每次可以从一个小方格移动到相邻的小方格（两个小方格相邻指它们有公共边）．现在在一些小方格的边上放置隔板，老鼠在移动时不能越过隔板．称一种放置隔板的方式是“仁慈的”，如果放置隔板后老鼠仍能吃到奶酪．求最小的正整数 n，使得对任意一种“仁慈的”放置 2023 个隔板的方式，老鼠都能通过不超过 n 次移动吃到奶酪．