2009 中国西部数学奥林匹克解答

第一天

1．设 M 是一个由实数集 R 去掉有限个元素后得到的集合．证明：对任意正整数 n，都存在 n 次多项式 $f(x)$，使得 $f(x)$ 的所有系数及 n 个实根都属于 M.

证明：设 a 为集合 $T=\{x\in R|x\notin M\}$ 中绝对值最大的元素，取实数 $k>\max\{|a|,1\}$.

对任意的正整数 n，考察 n 次多项式 $f(x)=k(x+k)^n$.

其 m 次项系数为 $k\cdot C_n^m\cdot k^{n-m}\geq k$，由 k 的选取可知，$f(x)$ 的所有系数均不属于 T，即必属于 M. 同样的，$-k$ 为 $f(x)$ 的 n 重实根，也属于 M.

故 n 次多项式 $f(x)=k(x+k)^n$ 满足条件.

2．给定整数 $n\geq 3$，求最小的正整数 k，使得存在一个 k 元集合 A 和 n 个两两不同的实数 x_1，x_2，…，x_n，满足

$$x_1+x_2,\ x_2+x_3,\ \cdots,\ x_{n-1}+x_n,\ x_n+x_1$$

均属于 A.

解：记 $x_1+x_2=m_1$，$x_2+x_3=m_2$，…，$x_{n-1}+x_n=m_{n-1}$，$x_n+x_1=m_n$.

首先，$m_1\neq m_2$，否则 $x_1=x_3$，矛盾！

类似地，$m_i\neq m_{i+1}$，其中 $i=1,2,\cdots,n$，$m_{n+1}=m_1$.

于是 $k\geq 2$.

若 $k=2$，不妨设 $A=\{a,b\}$，$a\neq b$，使得

$$(1)\begin{cases}x_1+x_2=a,\\ x_2+x_3=b,\\ \cdots\\ x_{n-1}+x_n=b,\\ x_n+x_1=a,\end{cases}\ (n\text{ 为奇数})\quad 或\quad (2)\begin{cases}x_1+x_2=a,\\ x_2+x_3=b,\\ \cdots\\ x_{n-1}+x_n=a,\\ x_n+x_1=b,\end{cases}\ (n\text{ 为偶数})$$

对于(1)，有 $x_n=x_2$，矛盾！

对于(2)，有 $$\frac{n}{2}a=(x_1+x_2)+(x_3+x_4)+\cdots+(x_{n-1}+x_n)$$

$$=\left(x_2+x_3\right)+\left(x_4+x_5\right)+\cdots+\left(x_n+x_1\right)=\frac{n}{2}b,$$

故$a=b$，矛盾！

对于$k=3$，构造例子如下：令$x_{2k-1}=k$，$k=1,2,\cdots$；$x_{2k}=n+1-k$，$k=1,2,\cdots$，

则当n为偶数时，$x_i+x_{i+1}=\begin{cases}n+1, & i\text{奇},\\ n+2, & i\text{偶且}i<n,\\ \dfrac{n}{2}+2, & i=n\left(x_{n+1}=x_1\right)\end{cases}$；

当n为奇数时，$x_i+x_{i+1}=\begin{cases}n+1, i\text{奇且}i<n,\\ n+2, i\text{偶},\\ \dfrac{n-1}{2}+2, i=n\left(x_{n+1}=x_1\right).\end{cases}$

综上所述，可知所求的k的最小值为3.

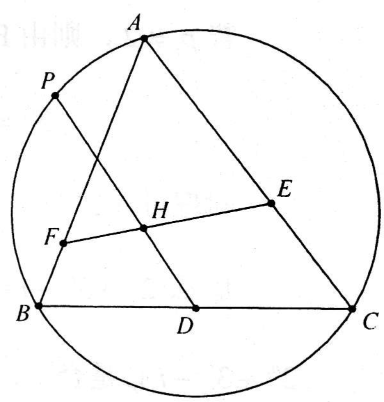
3．设H为锐角ΔABC的垂心，D为边BC的中点．过点H的直线分别交边AB，AC于F，E，使得$AE=AF$．射线DH与ΔABC的外接圆交于点P．

求证：P，A，E，F四点共圆．

证明：延长HD至点M使$HD=DM$，连结BM，CM，BH，CH，因为D为边BC的中点，所以四边形$BHCM$是平行四边形，故$\angle BMC=\angle BHC=180°-\angle BAC$，即$\angle BMC+\angle BAC=180°$，所以点$M$在$\Delta ABC$的外接圆上．

连结PB，PC，PE，PF，因为$AE=AF$，所以

$$\angle BFH=\angle CEH. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$



因为H是ΔABC的垂心，所以

$$\angle HBF=90°-\angle BAC=\angle HCE. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

结合①，②知，$\Delta BFH\sim\Delta CEH$，所以

$$\frac{BF}{BH}=\frac{CE}{CH}.$$

又由$BHCM$是平行四边形知$BH=CM$，$CH=BM$，

所以
$$\frac{BF}{CM}=\frac{CE}{BM}. \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

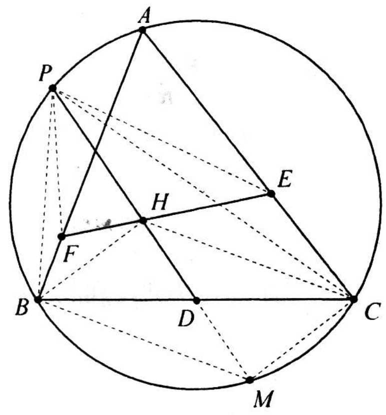
又D为BC的中点，所以$S_{\Delta PBM}=S_{\Delta PCM}$，所以

$$\frac{1}{2}BP\cdot BM\cdot\sin\angle MBP=\frac{1}{2}CP\cdot CM\cdot\sin\angle MCP,$$

由$\angle MBP+\angle MCP=180°$，可得

$$BP\cdot BM=CP\cdot CM, \quad\cdots\cdots\cdots\cdots ④$$

结合③，④知，
$$\frac{BF}{BP}=\frac{CE}{CP}.$$



因为$\angle PBF=\angle PCE$，所以$\Delta PBF\sim\Delta PCE$，故$\angle PFB=\angle PEC$，于是

$$\angle PFA=\angle PEA,$$

故P，A，E，F共圆．

4．求证：对任意给定的正整数k，总存在无穷多个正整数n，使得

$$2^n+3^n-1,\ 2^n+3^n-2,\ \cdots,\ 2^n+3^n-k$$

均为合数．

证明：对任意给定的正整数k，取足够大的正整数m，使得$2^m+3^m-k>1$．

考察2^m+3^m-1，2^m+3^m-2，…，2^m+3^m-k这k个大于1的正整数，依次取每个数的一个质因子p_1，p_2，…，p_k，记$n_t=m+t(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)$，其中$t$是任意正整数．

下面证明：对任意$1\le i\le k$，有$2^{n_t}\equiv 2^m \pmod{p_i}$．

若$p_i=2$，上式显然成立；

若$p_i\ne 2$，则由Fermat小定理可得

$$2^{n_t}=2^m\cdot 2^{t(p_1-1)(p_2-1)\cdots(p_k-1)}\equiv 2^m\cdot 1=2^m \pmod{p_i}.$$

同理可知$3^{n_t}\equiv 3^m \pmod{p_i}$．

那么$2^{n_t}+3^{n_t}-i\equiv 2^m+3^m-i\equiv 0 \pmod{p_i}$，且$2^{n_t}+3^{n_t}-i>2^m+3^m-i$，所以$2^{n_t}+3^{n_t}-i$必是合数．

因此n_t使得2^n+3^n-1，2^n+3^n-2，…，2^n+3^n-k均为合数，又由t的任意性可知这样的正整数有无穷多个．

第二天

5．设数列$\{x_n\}$ 满足$x_1\in\{5,7\}$及当 $k\geq1$时 $x_{k+1}\in\{5^{x_k},7^{x_k}\}$．试确定$x_{2009}$ 的末两位数字的所有可能值．

解：令 n=2009，则有：

(1) 如果 $x_n=7^{5^{x_{n-2}}}$，那么 $x_n\equiv7\pmod{100}$．

由于 5 和 7 都是奇数，故$x_k(1\leq k\leq n)$全都是奇数，故$5^{x_{n-2}}\equiv1\pmod 4$，即$5^{x_{n-2}}=4k+1$，其中$k$是正整数．

当 k，$m\geq0$ 时，由数学归纳法知$7^{4k+m}\equiv7^m\pmod{100}$，故

$$x_n=7^{5^{x_{n-2}}}=7^{4k+1}\equiv7\pmod{100}.$$

(2) 如果 $x_n=7^{7^{x_{n-2}}}$，那么$x_n\equiv43\pmod{100}$．

因为$7^{x_{n-2}}\equiv(-1)^{x_{n-2}}\equiv-1\equiv3\pmod4$，即$7^{x_{n-2}}=4k+3$，其中$k$是正整数．所以

$$x_n=7^{7^{x_{n-2}}}=7^{4k+3}\equiv7^3\equiv43\pmod{100}.$$

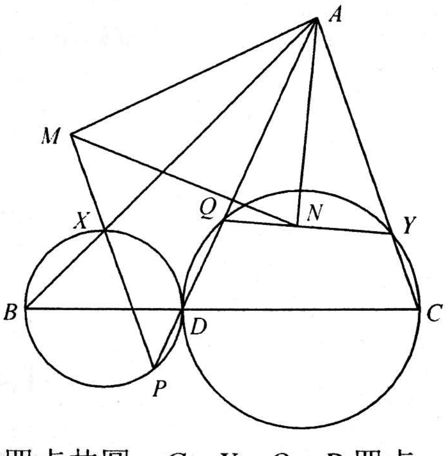
(3) 如果$x_n=5^{x_{n-1}}$，那么$x_n\equiv25\pmod{100}$．

由数学归纳法知，当 $n\geq2$ 时，$5^n\equiv25\pmod{100}$．显然 $x_{n-1}>2$，故$x_n=5^{x_{n-1}}\equiv25\pmod{100}$．

综合以上的结果，x_{2009}的末两位数字的所有可能值是 07，25，43．

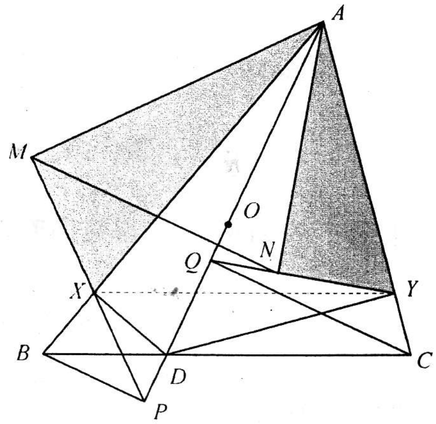
6．设点 D 是锐角$\triangle ABC$的边 BC 上一点，以线段 BD 为直径的圆分别交直线 AB，AD 于点 X，P（异于点 B，D），以线段 CD 为直径的圆分别交直线 AC，AD 于点 Y，Q（异于点 C，D）．过点 A 作直线 PX，QY 的垂线，垂足分别为 M，N．

求证：$\triangle AMN\backsim\triangle ABC$的充分必要条件是直线 AD 过$\triangle ABC$的外心．



证明：连接 XY、DX，由已知有 B，P，D，X四点共圆，C，Y，Q，D四点共圆，故

$\angle AXM = \angle BXP = \angle BDP = \angle QDC = \angle AYN$.



又因为$\angle AMX = \angle ANY = 90^\circ$，所以

$$\triangle AMX \backsim \triangle ANY,$$

所以 $\angle MAX = \angle NAY$，$\dfrac{AM}{AX} = \dfrac{AN}{AY}$.

从而$\angle MAN = \angle XAY$，结合$\dfrac{AM}{AX} = \dfrac{AN}{AY}$，得

$$\triangle AMN \backsim \triangle AXY.$$

所以，$\triangle AMN \backsim \triangle ABC \Leftrightarrow \triangle AXY \backsim \triangle ABC$

$\Leftrightarrow XY /\!/ BC \Leftrightarrow \angle DXY = \angle XDB$.

而由 A，X，D，Y 四点共圆，知$\angle DXY = \angle DAY$，又$\angle XDB = 90^\circ - \angle ABC$，所以

$$\angle DXY = \angle XDB \Leftrightarrow \angle DAC = 90^\circ - \angle ABC,$$

等价于直线 AD 过$\triangle ABC$ 的外心.

所以，$\triangle AMN \backsim \triangle ABC$ 的充分必要条件是直线 AD 过$\triangle ABC$ 的外心.

7. 有 n（$n>12$）个人参加某次数学邀请赛，试卷由 15 个填空题组成，每答对 1 题得 1 分，不答或答错得 0 分. 分析每一种可能的得分情况，发现：只要其中任意 12 个人得分之和不少于 36 分，则这 n 个人中至少有 3 个人答对了至少 3 个同样的题. 求 n 的最小可能值.

解： n 的最小可能值为 911.

(1)首先证明 911 满足条件：

若每个学生至少答对 3 个题. 由于每个学生答对 3 个题的不同情况有 $C_{15}^3 = 455$ 种，若有 911 名学生参赛，则由抽屉原则知，其中至少有 3 名学生答对了同样 3 个题.

若有一名学生答对题数不多于 2，则其余人中答对不超过 3 个题的学生不能超过 10 人（否则他们与第一个学生的分数总和少于 36 分）. 对于余下的 911−11=900 个学生，每个学生答对的题数都不小于 4. 由于 $C_4^3 = 4$，$4 \times 900 > 455 \times 2$，故其中至少有 3 名学生答对了同样 3 个题.

(2) 若有 910 名学生参赛，将这些学生分成 455 组，每组 2 人，每组学生恰答对同样的 3 个题. 此时不满足题设条件.

综上，$n_{\min} = 911$.

8．实数$a_1,a_2,\cdots,a_n(n\geq 3)$满足：$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$，且

$$2a_k\leq a_{k-1}+a_{k+1}，\quad k=2,3,\cdots,n-1.$$

求最小的$\lambda(n)$，使得对所有$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有

$$|a_k|\leq\lambda(n)\cdot\max\{|a_1|,|a_n|\}.$$

解：$\lambda(n)_{\min}=\dfrac{n+1}{n-1}$.

首先，取$a_1=1$，$a_2=-\dfrac{n+1}{n-1}$，$a_k=-\dfrac{n+1}{n-1}+\dfrac{2n(k-2)}{(n-1)(n-2)}$，$k=3,4,\cdots,n$，则满足$a_1+a_2+\cdots+a_n=0$及$2a_k\leq a_{k-1}+a_{k+1}$，$k=2,3,\cdots,n-1$．此时

$$\lambda(n)\geq\frac{n+1}{n-1}.$$

下证$\lambda(n)=\dfrac{n+1}{n-1}$时，对所有$k\in\{1,2,\cdots,n\}$，都有

$$|a_k|\leq\lambda(n)\cdot\max\{|a_1|,|a_n|\}.$$

因为$2a_k\leq a_{k-1}+a_{k+1}$，所以$a_{k+1}-a_k\geq a_k-a_{k-1}$，于是

$$a_n-a_{n-1}\geq a_{n-1}-a_{n-2}\geq\cdots\geq a_2-a_1,$$

所以
$$\begin{aligned}(k-1)(a_n-a_1)&=(k-1)[(a_n-a_{n-1})+(a_{n-1}-a_{n-2})+\cdots+(a_2-a_1)]\\&\geq(n-1)[(a_k-a_{k-1})+(a_{k-1}-a_{k-2})+\cdots+(a_2-a_1)]\\&=(n-1)(a_k-a_1),\end{aligned}$$

故
$$a_k\leq\frac{k-1}{n-1}(a_n-a_1)+a_1=\frac{1}{n-1}[(k-1)a_n+(n-k)a_1].\qquad①$$

同①可得，对固定的k，$k\neq 1,n$，当$1\leq j\leq k$时，

$$a_j\leq\frac{1}{k-1}[(j-1)a_k+(k-j)a_1],$$

当$k\leq j\leq n$时，

$$a_j\leq\frac{1}{n-k}[(j-k)a_n+(n-j)a_k],$$

所以
$$\sum_{j=1}^{k}a_j\leq\frac{1}{k-1}\sum_{j=1}^{k}[(j-1)a_k+(k-j)a_1]=\frac{k}{2}(a_1+a_k),$$

$$\sum_{j=k}^{n} a_j \le \frac{1}{n-k}\sum_{j=k}^{n}[(j-k)a_n+(n-j)a_k]=\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n),$$

相加得

$$a_k=\sum_{j=1}^{k} a_j+\sum_{j=k}^{n} a_j \le \frac{k}{2}(a_1+a_k)+\frac{n+1-k}{2}(a_k+a_n)$$

$$=\frac{k}{2}a_1+\frac{n+1}{2}a_k+\frac{n+1-k}{2}a_n,$$

所以 $$a_k \ge -\frac{1}{n-1}[ka_1+(n+1-k)a_n]. \qquad ②$$

由①，②得

$$|a_k| \le \max\{\frac{1}{n-1}|(k-1)a_n+(n-k)a_1|, \frac{1}{n-1}|ka_1+(n+1-k)a_n|\}$$

$$\le \frac{n+1}{n-1}\max\{|a_1|,|a_n|\}, \quad k=2,3,\cdots,n-1.$$

综上所述，$\lambda(n)_{\min}=\dfrac{n+1}{n-1}$.

一等奖12人

	考号	姓名	性别	所在学校	代表队名称	总分
1	92029	肖一君	男	南昌市第二中学	江西	111
2	92033	赵 禹	男	山西大学附中	山西	111
3	92047	赵 南	男	山西大学附中	山西	102
4	92049	王青璨	男	成都七中	四川	99
5	92048	邸睿达	男	西安交大附中	陕西	96
6	92008	陈 嘉	男	成都石室中学	四川	93
7	91005	庄正礼	男	莱佛士书院	新加坡	90
8	91007	Satylkhanov Kanat	男		哈萨克斯坦	90
9	91033	李有俊	男	莱佛士书院	新加坡	90
10	92024	马志宏	男	西北师大附中	甘肃	90
11	92039	张鑫杰	男	云南师大附中	云南师大附中	87
12	91048	Khajimuratov Nursultan	男		哈萨克斯坦	87

二等奖24人

	考号	姓名	性别	所在学校	代表队名称	总分
1	91034	洪延昇	男	新加坡国大附属中学	新加坡	84
2	92022	涂瀚宇	男	南充高中	四川	84
3	91019	关俊杰	男	莱佛士书院	新加坡	81
4	91046	唐佳豪	男	莱佛士书院	新加坡	81
5	92007	王园晔	男	西工大附中	陕西	81
6	92016	张样攀	男	鹰潭市一中	江西	81
7	91022	Darius Roland Onul	男		罗马尼亚	78
8	92035	林祎露	女	成都七中	四川	78
9	91016	卢俊彤	男	英皇书院	香港	75
10	91020	洪捷君	男	英华自主中学	新加坡	75
11	91043	谭嘉裕	男	皇仁书院	香港	75
12	91040	宋 涛	男	广西南宁三中	广西	72
13	92015	王德廉	男	海南中学	海南	72
14	92034	焦骏鹏	男	西安铁一中	陕西	72
15	92051	安 楠	男	兰州一中	甘肃	72
16	91002	卢政恺	男	喇沙书院	香港	69
17	91037	高 超	男	山西省实验中学	山西省实验中学	69
18	91051	万 捷	男	山西省实验中学	山西省实验中学	69
19	92002	柳 珺	女	景德镇一中	江西	69
20	92043	杨 皓	男	江西师大附中	江西	69
21	91006	林伟恩	男	新加坡国大附属中学	新加坡	66
22	91044	关展伟	男	英华书院	香港	66
23	91047	黄映霖	男	新加坡国大附属中学	新加坡	66
24	91049	Drobakh Andrey	男		哈萨克斯坦	66

三等奖

	考号	姓名	性别	所在学校	代表队名称	总分
1	91035	Rakhmet Rauan	男		哈萨克斯坦	63
2	92040	李路安	男	云南师大附中	云天化	63
3	91004	Sy, Amiel S.	男	菲律宾队	菲律宾	57
4	91011	张峻梓	男	重庆巴蜀中学	重庆	57
5	91012	段俊毅	男	乌鲁木齐市一中	新疆	57

6	91053	刘 洋	男	新疆实验中学	新疆	57
7	91001	胡伯卫	男	喇沙书院	香港	54
8	91026	白培良	男	乌鲁木齐市一中	新疆	54
9	91029	龚文杰	男	圣公会林护纪念中学	香港	54
10	92001	符敦友	男	海南中学	海南	54
11	92010	武振强	男	西北师大附中	甘肃	54
12	92012	刘东元	男	云南师大附中	云南师大附中	54
13	92026	杨鸿睿	男	云南师大附中	云南师大附中	54
14	91015	区绍豪	男	拔萃男书院	香港	51
15	91021	Mussayev Temirulan	男		哈萨克斯坦	48
16	92006	田乙胜	男	太原五中	山西	48
17	92042	傅绍恒	男	海南中学	海南	48
18	92054	黄亚蒙	男	云南师大附中	云天化	48
19	91008	Zhanbulatuly Medet	男		哈萨克斯坦	45
20	92013	董肖俊	男	云南师大附中	云天化	45
21	92037	包正钰	男	兰州一中	甘肃	45
22	91010	马正南	男	山西省实验中学	山西省实验中学	42
23	91024	曹玮剑	男	山西省实验中学	山西省实验中学	42
24	92053	毕 桢	男	云南师大附中	云南师大附中	42
25	92004	赵 源	男	银川一中	宁夏	36
26	92025	李 鑫	男	新疆乌市兵团二中	新疆生产建设兵团	36
27	91041	梁煜麟	男	贵州师大附中	贵州	33
28	91045	Go, Vance Eldric O.	男	菲律宾队	菲律宾	33
29	91052	温 林	男	重庆八中	重庆	33
30	92021	刘 乐	男	西安高新一中	陕西	33
31	92028	李颖达	女	海南中学	海南	33
32	92055	何惠威	男	贵州师大附中	贵州师大附中	33
33	91031	Chan, Matthew Chris Y.	男	菲律宾队	菲律宾	30
34	92030	马骥遥	男	赤峰市红旗中学	内蒙古	30
35	92036	马恩煜	男	西藏民院附中	西藏	30
36	92046	唐梁潇	男	青海师大附中	青海	30

纪念奖

	考号	姓名	性别	所在学校	代表队名称	总分
1	91030	黄 鞲	男	何明华会督银禧中学	香港	27
2	91032	Tan, Marquis Alexandre S.	男	菲律宾队	菲律宾	27
3	92018	章嘉玺	男	银川一中	宁夏	27
4	92020	唐中正	男	太原五中	山西	27
5	92027	殷明章	男	云南师大附中	云天化	27
6	92011	孙 豪	男	新疆乌市兵团二中	新疆生产建设兵团	27
7	92014	李思源	男	贵州师大附中	贵州师大附中	27
8	92038	申浩树	男	新疆乌市兵团二中	新疆生产建设兵团	27
9	91038	母川玉	女	西南师大附中	重庆	24
10	92023	曹绪坤	男	西藏民院附中	西藏	24
11	92050	张晨旭	男	西藏民院附中	西藏	24
12	91027	张智航	男	广西柳州高中	广西	21
13	91050	刘晓颖	女	昆三中	云南	21
14	92041	王言泽	女	贵州师大附中	贵州师大附中	21

15	91003	Bonamy, Kate Andrea C.	女	菲律宾队	菲律宾	18
16	91009	张 睿	男	曲靖一中	云南	18
17	91013	马文铧	男	南宁二中	广西	18
18	91014	胡振宇	男	贵州师大附中	贵州	18
19	91028	赵 郑	男	贵州师大附中	贵州	18
20	91039	张梦润	女	乌鲁木齐市一中	新疆	18
21	91054	时晨翼	男	广西桂林十八中	广西	18
22	91017	Chan, Janssen Lawrence S.	男	菲律宾队	菲律宾	15
23	91042	袁 野	男	贵州师大附中	贵州师大附中	15
24	91055	王康郦	男	贵州师大附中	贵州	15
25	92005	吴 迪	男	湟川中学	青海	15
26	92017	崔 傲	男	赤峰市红旗中学	内蒙古	15
27	92019	罗晓月	女	湟川中学一分校	青海	15
28	92032	李昊田	男	青海师大附中	青海	15
29	92052	申雁鹏	男	新疆乌市兵团二中	新疆生产建设兵团	15
30	91018	Tan, Keefe Collin A.	男	菲律宾队	菲律宾	12
31	91036	李振宇	男	昆一中	云南	12
32	92003	高宇辰	男	赤峰市红旗中学	内蒙古	12
33	92031	许亚伟	男	银川九中	宁夏	12
34	91023	何 洋	男	玉溪一中	云南	9
35	91025	张文阳	男	重庆育才中学	重庆	9
36	92009	何乐为	男	西藏民院附中	西藏	9
37	92044	张高乐	男	赤峰市红旗中学	内蒙古	9
38	92045	杨董超	男	银川二中	宁夏	6

合110人

团队优胜奖　四川队